Relativitätstheorie

Stefan Leuthold

Astronomiefreifach
Kantonsschule Zürcher Oberland, Wetzikon

Frühlingssemester 2002

Zusammenfassung

Während die Physiker auf der ganzen Welt am Ende des 19. Jahrhunderts die Physik als fertig betrachteten, entstand eine im wesentlichen von einer einzigen Person erschaffene neue Theorie, welche fundamental für unser Verständnis von der Natur werden sollte: Die Relativitätstheorie von Albert Einstein.
In der ersten Hälfte dieses Freifachs werden wir die spezielle Relativitätstheorie so ausführlich wie möglich behandeln und die grundlegenden Formeln herleiten. Allenfalls bleibt am Schluss noch Zeit für einige Tatsachen der allgemeinen Relativitätstheorie.

Inhaltsverzeichnis

1 Historisches

1.1 Physik am Ende des 19. Jahrhunderts

Mit Newtons Gravitationstheorie und seiner Mechanik konnten die Bewegungen aller Körper einwandfrei beschrieben werden und mit Maxwells Elektrodynamik hatte man auch alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen im Griff - dies war die gängige Meinung des 19. Jahrhunderts. *Die Physik schien fertig.* Die Beschreibung von Gasen mit den Gesetzen der Mechanik, die sogenannte statistische Mechanik, wie sie zum Beispiel von Ludwig Boltzmann betrieben wurde, gab Anlass zur Vermutung, dass alles, was nicht in Maxwells Theorie enthalten war, mit der Newton'schen Mechanik beschrieben werden konnte.

Die folgenden Zitate[1] geben eine gute Idee davon, was die Physiker vor Einsteins spezieller Relativitätstheorie und der Entdeckung der Quantenmechanik (ohne die wir heute z. B. keine Computer hätten) noch gedacht hatten:

> Die wichtigsten Grundgesetze und Grundtsachen der Physik sind alle schon entdeckt; und diese haben sich bis jetzt so fest bewährt, dass die Möglichkeit, sie wegen neuer Entdeckungen beiseite zu schieben, ausserordentlich fern zu liegen scheint... Unsere künftigen Entdeckungen müssen wir in den 6. Dezimalstellen suchen.
> A. A. Michelson, 1903

> Nun zur Physik, wie sie sich damals präsentierte. Bei aller Fruchtbarkeit im einzelnen herrschte in prinzipiellen Dingen dogmatische Starrheit: Am Anfang (wenn es einen solchen gab) schuf Gott Newtons Bewegungsgesetze samt den notwendigen Massen und Kräften. Dies ist alles; das Weitere ergibt die Ausbildung geeigneter mathematischer Methoden durch Deduktion. Was das 19. Jahrhundert fussend auf diese Basis geleistet hat, musste die Bewunderung jedes empfüglichen Menschen erwecken.
> A. Einstein

> Ich bin niemals zufrieden, bevor ich ein mechanisches Modell des Gegenstandes konstruiert habe, mit dem ich mich beschäftige. Wenn es mir gelingt, ein solches herzustellen, verstehe ich, andernfalls nicht. Daher kann ich die elektromagnetische Theorie des Lichts nicht begreifen. Ich möchte das Licht so vollständig verstehen wie möglich, ohne Dinge einzuführen, die ich noch weniger verstehe. Daher halte ich an der einfachen Dynamik fest, denn dort kann ich ein Modell finden, jedoch nicht in der elektromagnetischen Theorie.
> Lord Kelvin, 1884

[1] Alle Zitate stammen aus [3], Kapitel 5.2.

1.2 Entdeckung der speziellen Relativitätstheorie

Einstein waren die Ergebnisse des Michelson-Morley Experimentes nicht einmal im Detail bekannt, als er 1905 seine Arbeit *Über die Elektrodynamik bewegter Körper* einreichte, welche die vollständige spezielle Relativitätstheorie enthielt. Er liess sich lediglich von der Idee leiten, das Verhalten der elektromagnetischen Wellen mit der Newton'schen Mechanik in Verbindung zu bringen, vor allem in Bezug auf die Vorstellungen von Raum und Zeit.

Zur Frage, ob nicht Lorentz oder Poincaré bereits vor Einstein die spezielle Relativitätstheorie entdeckt hatten, ein Zitat von Lorentz[2] aus dem Jahre 1928:

> Daher führte ich das Konzept der lokalen Zeit ein, die für relativ zueinander bewegte Bezugssysteme verschieden ist. Ich dachte aber nie, dass sie etwas mit der wirklichen Zeit zu tun hat. Die wirkliche Zeit war für mich noch immer durch das alte Konzept einer absoluten Zeit gegeben, die unabhängig von jedem Koordinatensystem ist. Es gab für mich nur diese eine wahre Zeit. ... So ist die Relativitätstheorie wirklich allein Einsteins Werk.

Einstein beantwortete die Frage nach der Entstehung der speziellen Relativitätstheorie noch kurz vor seinem Tod am 19. Februar 1955 folgendermassen:[3]

> Es ist zweifellos, dass die spezielle Relativitätstheorie, wenn wir ihre Entwicklung rückschauend betrachten, im Jahre 1905 reif zur Entdeckung war. Lorentz hatte schon erkannt, dass für die Analyse der Maxwell'schen Gleichungen die später nach ihm benannte Transformation wesentlich sei, und Poincaré hat diese Erkenntnis noch vertieft. Was mich betrifft, so kannte ich nur Lorentz' bedeutendes Werk von 1895, aber nicht Lorentz' spätere Arbeit und auch nicht die daran anschliessende Untersuchung von Poincaré. In diesem Sinne war meine Arbeit selbständig. Was dabei neu war, war die Erkenntnis, dass die Bedeutung der Lorentztransformationen über den Zusammenhang mit den Maxwell'schen Gleichungen hinausging und das Wesen von Raum und Zeit im allgemeinen betraf. Auch war die Einsicht neu, dass die Lorentz-Invarianz eine allgemeine Bedingung sei für jede physikalische Theorie. Dies war für mich von besonderer Wichtigkeit, weil ich schon früher erkannt hatte, dass die Maxwell'sche Theorie die Mikrostruktur der Strahlung nicht darstellte und deshalb nicht allgemein haltbar sei.

1.3 Roemers Berechnung der Lichtgeschwindigkeit

Bereits 1679 berechnete der dänische Astronom *Olaf Roemer* die Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe einer Beobachtung: Er betrachtete die Jupitermonde

[2] Aus [5].
[3] Aus [5].

Io und Ganymed, welche auf ihrer Umlaufbahn um Jupiter immer wieder in dessen Schatten verschwanden und wieder auftauchten.

Wenn diese Monde immer etwa gleich lange brauchten, um Jupiter zu umkreisen, dann musste sie auch immer etwa gleich lange in dessen Schatten verweilen. Roemer beobachtete aber, dass die kleinste Verweildauer im Schatten etwa 16,5 Minuten kürzer war als die längste Verweildauer. Das musste daher rühren, dass die Erde von Jupiter einmal näher und einmal weiter entfernt war (vgl. Skizze).

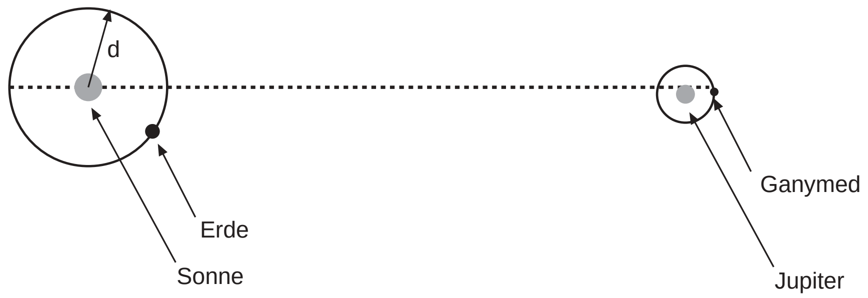

Abbildung 1: *Roemers Überlegungen: Licht legt den Weg 2d zurück, wenn es 16,5 Minuten Verspätung hat.*

Nehmen wir an, dass die Erde im Mittel $d = 149{,}6$ Millionen km von der Sonne entfernt ist, erhalten wir damit die Lichtgeschwindigkeit aus

$$v_{\text{Licht}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{km}}{16,5 \cdot 60 \text{s}} \approx 302'200 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

was mit dem heutigen exakt festgelegten Wert von

$$c := 299'792'458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ziemlich gut übereinstimmt.

Man wusste also bereits vor 1700, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich war - nur hatte dies vorerst keine Konsequenzen für die Physik.

2 Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Motivation

Die *Newton'sche Mechanik*, welche *Sir Isaac Newton* im Jahre 1687 veröffentlichte in seinen *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* beschreibt bis heute fast alle Bewegungen der Körper auf der Erde und am Himmel korrekt. Zusammen mit den 1860 veröffentlichten Gleichungen von *James Clerk Maxwell* bildeten sie die Grundpfeiler der Physik. Man nahm an, dass mit diesen beiden Theorien die Physik fertig war, bis sich an einigen Experimenten und zuletzt mit Einsteins bahnbrechender Arbeit grundlegende Fragen zu Raum und Zeit stellten, welche nicht im Rahmen der bereits vorhandenen Theorie erklärt werden konnten.

Newton'sche Mechanik. Ausgehend von den Definitionen

$$\vec{v} := \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}, \qquad \vec{a} := \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \tag{1}$$

notieren wir die grundlegenden Newton'schen Axiome:

1. *Trägheitsgesetz.* Wenn keine Kraft auf einen Körper einwirkt, bleibt dieser entweder in Ruhe, wenn er bereits in Ruhe ist, oder bewegt sich gleichförmig auf einer Geraden, wenn er bereits in Bewegung ist.

2. *Bewegungsgesetz.*

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{2}$$

   Daraus lesen wir für $F = 0$ wieder das Trägheitsgesetz ab und mit (1) folgt, dass Kräfte sich dahingehend manifestieren, dass sie den Bewegungszustand eines Körpers ändern (Geschwindigkeit oder Richtung verändern). Zusammen mit der trivalen Beobachtung, dass Kräfte Körper deformieren, liefert das 2. Newton'sche Axiom also eine *Definition für Kraft.* Wenn nur Gravitationskräfte wirken, schreiben wir (2) auch als $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$.

3. *Reaktionsgesetz.* Für zwei beliebige Körper 1 und 2 existieren Kräfte zwischen den beiden Körpern, für welche gilt[4]

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Geschwindigkeiten, und damit auch Beschleunigungen und Kräfte, sind immer abhänging davon *von wo aus gemessen wird.* Alles, was man braucht, um Geschwindigkeiten zu messen, nennen wir ein *Bezugssystem*, und Bezugssysteme, in welchen das Trägheitsgesetz gilt *Inertialsysteme.*[5]

Nun liegen obigen Definitionen und Gesetzen stillschweigend einige Annahmen zu Grunde, welche als *Newton'sches Relativitätsprinzip* bezeichnet werden:

[4] Die Indizes sollen folgendermassen gelesen werden: F_{12} ist die Kraft, welche Körper 1 auf Körper 2 ausübt.

[5] Engl. *inertia* heisst Trägheit.

1. Raum und Zeit sind absolut.

2. Alle relativ zu einem Inertialsystem gleichförmig bewegten Bezugssysteme sind ebenfalls Inertialsysteme und im Rahmen der Newton'schen Mechanik gleichwertig.

In Newtons eigenen Worten[6]:

> Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äusseren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.
> ...
> Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfliesst an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äusseren Gegenstand. Sie wird so auch mit dem Namen Dauer belegt.

Maxwells Theorie der elektromagnetischen Wellen. Ausgehend von Michael Faradays Arbeiten fand James Clerk Maxwell eine einheitliche Formulierung der vier Grundgesetze von Elektrizität und Magnetismus mit den *elektrischen Feldern* $\vec{E}$ und den *magnetischen Feldern* $\vec{B}$, in Abhängigkeit von den Quellen der $E-$ und $B-$Felder (Ladungen und Ströme). Die Bedeutung der *Maxwell'schen Gleichungen* für die damit geschaffene Elektrodynamik ist vergleichbar mit der Bedeutung der Newton'schen Axiome für die Mechanik.

Maxwells Gesetze sagten die Existenz von elektromagnetischen Wellen voraus, welche durch bewegte Ladung erzeugt werden[7], und für die gilt

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c. \tag{3}$$

ϵ_0 und μ_0 sind Naturkonstanten. Dieser Wert entspricht gerade dem gemessenen Wert für die Lichtgeschwindigkeit c, mit der sich demnach alle elektromagnetischen Wellen fortpflanzen. Dies brachte Maxwell zum Schluss, dass auch Licht eine elektromagnetische Welle sein muss.[8]

Der Äther. Wenn Licht eine elektromagnetische Welle ist und für diese eine Geschwindigkeit bestimmt werden konnte, dann stellten sich zwei Fragen:

1. In welchem Bezugssystem galt diese Geschwindigkeit?

2. In welchem Medium bewegten sich die Lichtwellen fort?

[6] Aus den Principia Mathematica Philosophiae Naturalis

[7] Zum Beispiel ein Wechselstrom in einer Antenne, dies wurde 1887 von Heinrich Hertz das erste Mal beobachtet.

[8] Wir können uns Licht mit $E-$ und $B-$Feld zusammengesetzt zum Beispiel mit Polarisationsfiltern anschaulich verdeutlichen.

Die Antwort auf beide Fragen dachte man in der Einführung des sogenannten *Äthers* gefunden zu haben, einer Substanz, welche den ganzen Weltraum erfüllte, eine vernachlässigbare Dichte hatte[9] und ausserordentlich starr war.[10]

Diesen Äther konnte man als Bezugssystem für die Lichtgeschwindigkeit wählen und darin bewegten sich die elektromagnetischen Wellen fort. Auf dieses ruhende System mussten sich damit alle anderen Systeme beziehen. Da sich die Erde aber durch den Weltraum bewegt auf ihrer Bahn um die Sonne, musste die Lichtgeschwindigkeit ausgehend von einer auf der Erde stehenden Quelle variieren, je nachdem, ob man das Licht nach Westen oder Osten schickte (also einmal entgegen der Bewegung der Erde um die Sonne, und einmal in die selbe Richtung).

Die Vorbereitungen für dieses Experiment macht Albert Michelson bereits 1881 und das eigentliche Experiement 1887 - ohne Erfolg. Auch alle nachfolgenden Experimente zeigten, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant war unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle.[11]

2.2 Einstein'sche Postulate

Einstein schreibt selbst in seiner Biographie[12]

> Nach zehn Jahren Nachdenkens fand ich ein Prinzip, auf das ich schon mit 16 Jahren gestossen bin. Wenn ich einem Lichtstrahl mit Lichtgeschwindigkeit nacheile, so sollte ich diesen Lichtstrahl als ruhend wahrnehmen. So etwas scheint es aber nicht zu geben. Intuitiv klar schien es mir von vornherein, dass sich für einen solchen Beobachter alles nach denselben Gesetzen abspielen müsse wie für einen relativ zur Erde ruhenden Beobachter.

Alleine daraus zog Einstein den Schluss, dass sich *Licht in jedem Inertialsystem in allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet.* Zusammen mit einer Modifikation des Newton'schen Relativitätsprinzips ergibt dies die

Einstein'schen Postulate

1. *Relativitätsprinzip.* Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

2. *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.* In allen Inertialsystemen breitet sich Licht im Vakuum isotrop in allen Richtungen aus und unabhängig

[9] Damit keine Reibung mit normalen Körpern stattfindet, die man sonst hätte beobachten müssen, z. B. bei Planeten.

[10] Dies erklärte, weshalb Licht eine rein transversale Welle war und keine longitudinalen Anteile beobachtet werden konnten.

[11] Dies gilt für alle Wellenausbreitungen.

[12] [1], Seite 345.

von der momentanen Bewegung der Lichtquelle mit der Geschwindigkeit

$$c := 299'792'458 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Diese Prinzipien folgen *nicht* aus Beobachtungen, sondern sind alleine Einsteins Ideen - welche sich bis heute als richtig herausstellten.

Durch diese Postulate wird allen Geschwindigkeiten eine Obergrenze gesetzt. Nichts kann sich schneller als das Licht ausbreiten, nichts kann sich schneller als Licht bewegen (auch kein Körper und keine Information).

2.3 Bedeutung der SRT für die Zeit

Wir stellen uns eine ruhende Beobachterin auf der Erde vor, welche ein Raumschiff anschaut, das an ihr vorbeifliegt. Im Raumschiff sitze eine Astronautin auf dem Boden. Wir stellen uns weiter vor, dass die Astronautin eine Lichtuhr besitze, das ist ein Apparat mit zwei Spiegeln, einen am Boden und einen an der Decke des Raumschiffs befestigt, und zwischen den Spiegeln flitzt ein Lichtimpuls hin und her. Jedesmal, wenn der Lichtimpuls einen Spiegel trifft, macht der Apparat *tick* und ist deshalb ein guter Zeitmesser.

Wenn das Raumschiff mit Geschwindigkeit v an der ruhenden Beobachterin vorbeifliegt, dann sieht die Beobachterin auf der Erde einen Zick-Zack-Weg, wenn sie die Lichtuhr anschaut.

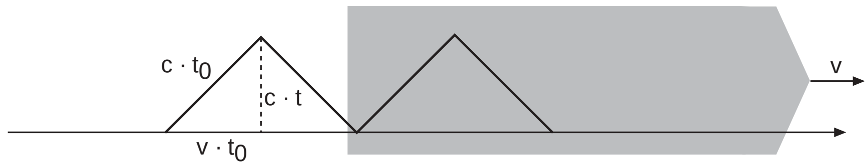

Abbildung 2: *Die Rakete fliegt mit Geschwindigkeit v bezüglich einer Person, welche auf der Erde stillsteht. Die zick-zack-Linie ist der Weg des Lichtstrahls von aussen gesehen, die gestrichelte Linie ist der Weg des Lichtstrahls für die Astronautin.*

Der Weg des Lichtes, den die Astronautin in ihrer Lichtuhr misst, sei $d = c \cdot t$, dann sieht die ruhende Beobachterin einen anderen Lichtweg von $s = c \cdot t_0$, und gemäss Pythagoras gilt

$$c^2 t_0^2 = v^2 t_0^2 + c^2 t^2,$$

und dies gibt nach der Zeit t_0 der ruhenden Beobachterin aufgelöst

$$t_0 = t \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Die Zeit vergeht im Ruhesystem am langsamsten. Diesen Effekt nennt man *Zeitdilatation*. Die Zeit, welche auf einer Uhr vergeht, die auf dem bewegten Körper festgemacht ist, heisst *Eigenzeit*. Einige Beispiele sollen den Umgang mit der Zeit in der speziellen Relativitätstheorie verdeutlichen.

2.3.1 Zeitdilatation im Alltag.

Wenn jemand mit dem Auto von Wetzikon nach Zürich fährt, hat sie (je nach Autobahntempo) eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $80\frac{km}{h} \approx 22,25\frac{m}{s}$ und braucht dafuer etwa eine halbe Stunde. Gleichung (4) sagt uns, dass für die Autofahrerin die Zeit langsamer verstreicht, als für jemand, der im Kaffee sitzt und zusieht, wie das Auto an ihm vorbeifährt.

Dieser Effekt ist aber sehr gering, die Eigenzeit der Autofahrerin ist nicht wesentlich kleiner als die Zeit, welche im Ruhesystem verstreicht:

$$
\begin{aligned}
(4) \Longrightarrow t &= t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= 30 \cdot 60\text{s} \cdot \sqrt{1-\frac{22,25^2}{(3\cdot 10^8)^2}} \\
&\approx 1800\text{s}\sqrt{1-\frac{495}{9\cdot 10^{16}}} \\
&\approx 1800\text{s}.
\end{aligned}
$$

Der Effekt tritt also erst bei wesentlich grösseren Geschwindigkeiten auf.

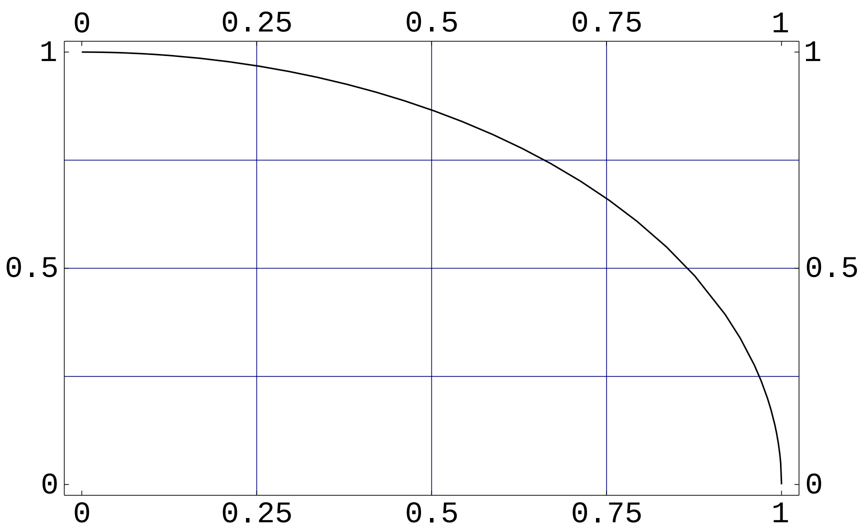

Abbildung 3: *Die Kurve zeigt den Faktor* $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ *auf der y-Achse in Abhängigkeit von* $\frac{v}{c}$ *auf der x-Achse. Man sieht, dass erst bei Geschwindigkeiten von* $v > \frac{1}{2}c$ *die Effekte der Zeitdilatation eine wesentliche Rolle zu spielen beginnen.*

2.3.2 Zwillingsparadox.

Zwei Zwillinge entschliessen sich, in die Raumfahrt einzusteigen. Der eine Zwilling fliegt von der Erde fort mit einem Raumschiff, während der andere ihn beobachtet von auf der Erde bleibt. Dann der Zwilling im Raumschiff wird nach Gleichung (4) nicht so schnell alt wie der Zwilling auf der Erde, da dieser in Ruhe ist und wir annehmen können, dass sich der Zwilling im Raumschiff in einem Inertialsystem bewegt. Natürlich kann man auch umgekehrt argumentieren, dass der Zwilling im Raumschiff in Ruhe bleibt und sich der Zwilling auf der Erde bewegt (alles eine Frage des Standpunktes: Manchmal denken wir auch, dass der Zug nebenan losfährt und wir noch sitzenbleiben, ...). Das würde aber bedeuten, dass der Zwilling im Raumschiff schneller altert als der Zwilling auf der Erde - dies ist unmöglich: Entweder altert der Zwilling auf der Erde schneller oder derjenige im Raumschiff, es können nicht beide schneller altern als der andere.

Dieser Gedankengang heisst *Zwillingsparadox*, weil man meint, aus dem Dilemma keinen Ausweg finden zu können, dass beide Zwillinge schneller altern als der andere. Es gibt jedoch eine ganz einfache Methode, durch welche man eindeutig bestimmen kann, welcher Zwilling schneller altert: Man gibt beiden einen Becher Kaffee und beobachtet sie in den ersten Minuten nach Reisebeginn. Es ist falsch, dass man behaupten kann, dass beide in Ruhe sein können, während sich der andere bewegt: Einer von beiden wird den Becher Kaffee zu Beginn der Reise verschütten - dieser wird beschleunigt und damit ist er derjenige, der nicht in Ruhe sein kann während der Reise. Der Zwilling mit dem Kaffeefleck ist also der bewegte Zwilling und folglich derjenige, der weniger schnell altern wird.

Rechenbeispiel. Da wir nun sichergestellt haben, dass wir verstehen, welcher Zwilling in Ruhe und welcher bewegt ist, können wir die Bedeutung der speziellen Relativitätstheorie für die Zeit an diesem Beispiel berechnen. Selbstverständlich bleibt dieses Beispiel ohne Realitätsanspruch.

Betrachten wir ein Astronomenpärchen, Erdolf und Raumine. Sie sind beide 25 Jahre alt und haben Ihre gemeinsame Zukunft schon verplant. Jetzt ergibt es sich, dass Raumine an einer Weltraumexpedition teilnehmen kann: Sie fliegt zu einem 8 Lichtjahre entfernten Stern und zurück. Das Raumschiff fliege mit einer Geschwindigkeit von $v = \frac{4}{5}c$. Nun haben wir drei verschiedene Perspektiven: 1. Erdolf und Raumine, welche die Reise planen und alles vorausberechnen, 2. Raumine, welche ihr Reisetagebuch führt, und 3. Erdolf, der Raumine natürlich die ganze Zeit beobachtet.

1. Reisefahrplan (Berechnung). Erdolf und Raumine berechnen für die Reisedauer[13]
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta t = \frac{2 \cdot 8 \text{ ly}}{\frac{4}{5}c} = 20\text{y},$$
wenn Raumine also 2002 losfliegt, wird sie 2012 beim Stern und 2022 wieder zurück sein.

[13] 1 ly = 1 Lichtjahr = Distanz, welche das Licht in einem Jahr zurücklegt. Physikalisch richtig müsste man hier schreiben $8c$ y, weshalb sich c wegkürzt und das Ergebnis richtig in Jahren herauskommt.

2. Reisetagebuch. Raumine erlebt es anders. Natürlich wird sie in ihrem Reisetagebuch den Lift-Off auch im Jahr 2002 eintragen. In ihrem System ist aber nach Gleichung (4)

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t_0\sqrt{1-\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 c^2}{c^2}} = t_0\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}t_0,$$

und damit läuft ihre Uhr wesentlich langsamer als Erdolfs Uhr. Wenn bei Erdolf $t_0 = 60$ Minuten vergangen sind, dann sind bei Raumine lediglich $t = \frac{3}{5}t_0 = 36$ Minuten vergangen. In ihrem Reisetagebuch wird Raumine also eintragen, dass sie im Jahr 2008 beim Stern angekommen ist, und 2014 wieder auf der Erde landet. *Ramine wird nach ihrer Rückkehr also 8 Jahre jünger sein als Erdolf, der bei ihrer Abreise noch gleich alt war.*

3. Erdolf's Beobachtungen. Da das Licht 8 Jahre braucht, um vom Stern zur Erde zu gelangen, wird Erdolf Raumine erst im Jahr 2020 beim Stern ankommen sehen. Obwohl er mit ihr zusammen richtig vorausberechnet hat, dass sie 10 Jahre hin- und 10 Jahre zurückfliegt, wird er sie 18 Jahre hin- und 2 Jahre zurückfliegen sehen.

2.3.3 Gleichzeitigkeit.

Vor der speziellen Relativitätstheorie galten zwei Ereignisse als gleichzeitig, wenn sie auf synchronisierten Uhren abgelesen zu gleichen Zeiten stattfanden. Dies ist natürlich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie nicht mehr möglich: Synchronisiert man zwei Uhren und bringt sie an verschiedene Orte, um die Zeit von verschiedenen Ereignissen anzuzeigen, gehen die Uhren nicht mehr synchron, da sie durch die Bewegung zum Ort des Ereignisses der Zeitdilatation unterliegen.

In der speziellen Relativitätstheorie muss man Uhren mit der *Einstein-Uhrensynchronisation* stellen: Zwei Uhren gehen nur dann gleich, wenn sie sich im selben Intertialsystem befinden und mit einem Lichtblitz gestartet werden, welcher von einer Lichtquelle ausgesandt wird, von wo die Wege zu den beiden Uhren gleich sind.

2.3.4 Das Experiment von Hafele und Keating.

Die Zeitschrift TIME veröffentlichte die Ergebnisse eines Versuches von Joseph C. Hafele und Richard Keating am 18.10.1971. Die beiden Physiker sind mit Atomuhren an Bord von Lininenflugzeugen um die Welt geflogen, einer nach Osten, der andere nach Westen und sie konnten ein Abweichen der Uhren in Abhängigkeit von ihrer Bewegung zeigen.

Ein Flug um die Erde dauert etwa zwei Tage. Stellt man eine Atomuhr am Äquator auf, bewegt sich diese Uhr mit der Geschwindigkeit v_A einer Erdumdrehung pro Tag:

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{40'000\mathrm{km}}{24\mathrm{h}} \approx 1667\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Wir betrachten zwei Flugzeuge, welche mit $v = 800\frac{\text{km}}{\text{h}}$ über Boden fliegen. Da die Erde sich Richtung Osten dreht,[14] sind die beiden Geschwindigkeiten v_F der Flugzeuge

$$v_{\text{FO}} = 1667 + 800\frac{\text{km}}{\text{h}} = 2467\frac{\text{km}}{\text{h}}, \qquad v_{\text{FW}} = 1667 - 800\frac{\text{km}}{\text{h}} = 867\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Wegen der Zeitdilatation geht die Uhr beim Ostflug schneller als diejenige am Äquator, beim Westflug langsamer.

Für die Zeitdifferenzen $t_A - t_F$ der Uhren im Ostflug bzw. im Westflug berechnet man

$$t_{\text{A}} = t_0\sqrt{1-\frac{v_{\text{A}}^2}{c^2}} = t_0\left(1-\frac{v_{\text{A}}^2}{2c^2}\right),$$

wo wir beim zweiten Gleichheitszeichen $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}x$ benutzt haben.[15] Auf dieselbe Art berechnet man t_{F} und bekommt

$$\Delta t_{\text{Ost}} = -255\text{ns}, \qquad \Delta t_{\text{West}} = 156\text{ns}.$$

Hafele und Keating konnten nicht dem Äquator entlangfliegen, deshalb wichen ihre berechneten Zeiten von diesen ab. Das Experiment bestätigte aber die von ihnen berechneten Resultate. So wurde das erste mal eine Zeitdilatation mit makroskopischen Uhren gemessen.

2.4 Bedeutung der SRT für die Längenmessung

Wir denken uns eine Rakete, welche mit $v = \frac{3}{5}c$ an uns vorbeifliegt, während wir auf der Erde stehen. An Bug und Heck des Raumschiffs sind Uhren angebracht. Wir haben selber eine Uhr auf der Erde und stoppen, wie lange der Vorbeiflug dauert. Wenn wir für den Vorbeiflug eine Zeit t_0 messen, verstreicht im Raumschiff gemäss (4) eine Zeit

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Da wir die Länge des Raumschiffs berechnen können aus (1), folgt

$$l_0 = vt_0, \qquad l = vt,$$

und damit

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{5}$$

Da Uhren von bewegten Körpern langsamer gehen, ist es intuitiv klar, dass bewegte Massstäbe kürzer werden - dies wird durch obige Rechnung bestätigt. Dieser Effekt heisst *Längenkontraktion.*

Nehmen wir an, dass die Rakete im Ruhesystem gemessen die Länge $l_0 = 50$ m hat, dann misst die Rakete in diesem Vorbeiflug nur noch $l = l_0\sqrt{1-\frac{\frac{9}{25}c^2}{c^2}} = 50\text{m}\cdot\frac{4}{5} = 40$ m.

[14] Dies kann man daran feststellen, dass die Sonne im Osten aufgeht.

[15] Dies geht, da $x \ll 1$ wegen $v_{\text{A}} \ll c$.

2.5 Minkowski-Diagramme

Um Bewegungen besser zu verstehen braucht man in der Physik häufig *Weg-Zeit-Diagramme* wie in Abbildung 4.[16] Auf der x-Achse ist die Zeit dargestellt, auf der y-Achse die Länge des zurückgelegten Weges. An diesen Diagrammen kann man ablesen, ob und wann ein Körper beschleunigt wurde, ob er in Ruhe ist und ob er sich vorwärts oder rückwärts bewegt:

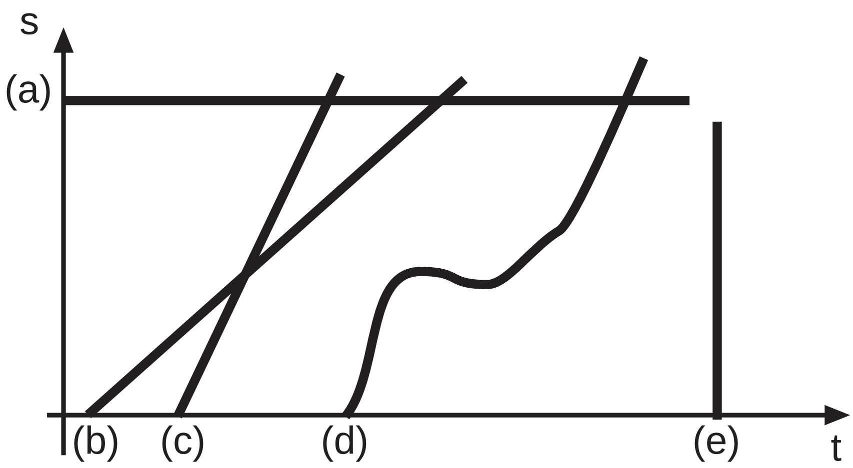

Abbildung 4: *Weg-Zeit-Diagramm: (a) steht einfach still, (b) wird von (c) überholt, beide fahren mit konstanter Geschwindigkeit (deshalb sind ihre Kurven Geraden), (d) beschleunigt, bremst, fährt ein Stück rückwärts und beschleunigt dann wieder, (e) ist gar nicht möglich, da ein Körper keine Zeit brauchen würde, um einen Weg zurückzulegen. Selbstverständlich sind in diesem Diagramm zwei Dimensionen unterdrückt: Überall, wo sich die Kurven schneiden, würde sonst ein Unfall passieren!*

Hermann Minkowski führte ähnliche Diagramme für die spezielle Relativitätstheorie ein, er trug jedoch die Zeit auf der y-Achse und die Raumkomponente(n) auf der x-Achse ab und eichte die Achsen um. Aus den normalen Raum-Zeit-Diagrammen werden dann *Minkowski Diagramme*.

2.5.1 Nichtrelativistische Diagramme

Wir betrachten zuerst ein einfaches Minkowski-Diagramm für nichtrelativistische Geschwindigkeiten, Abbildung 5.

Das Velo fährt in diesem Diagramm offenbar dem Auto entgegen. Einen Punkt im Minkowski-Diagramm nennt man *Ereignis*, die Menge aller Ereignisse eines Körpers nennt man *Weltlinie*. Das Diagramm zeigt also die Weltlinien für Auto und Velo. Ein besonders bedeutsames Ereignis ist der Punkt,

[16] In der Kantiphysik stellt die x-Achse immer die Länge des Weges dar, aber es wird auch nur eine Achse benötigt, weil man nur eindimensionale Probleme betrachtet. Im allgemeinen Fall heissen diese Diagramme dann Raum-Zeit-Diagramme, um klarzustellen, dass die eindimensionale Betrachtungsweise eine Vereinfachung ist

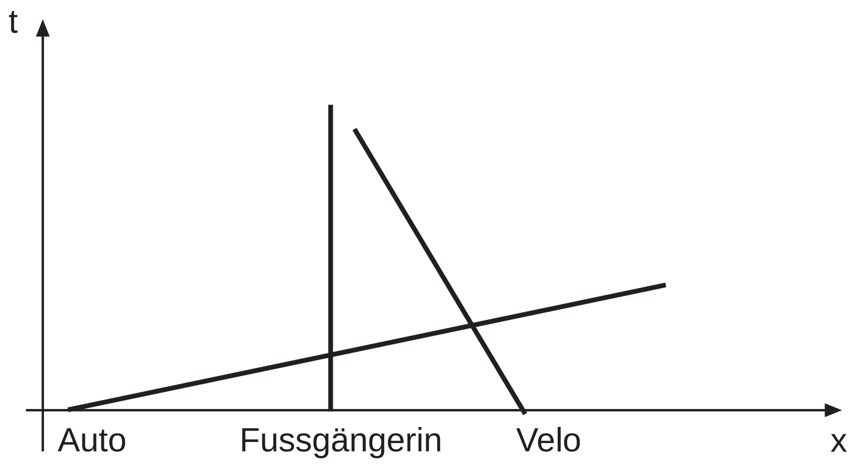

Abbildung 5: *Weltlinien eines Autos, einer stillstehenden Fussgängerin und eines Velos, welches in die entgegengesetzte Richtung des Autos fährt.*

in dem sich die beiden Weltlinien kreuzen: Wenn wir wirklich nur ein eindimensionales Problem betrachten passiert dort ein Unfall.[17] Eine Weltlinie, die parallel zur t-Achse steht, gehört zu einem ruhenden Körper, je flacher eine Weltlinie wird, desto grösser ist die Geschwindigkeit des Körpers. Geraden sind Weltlinien von Körpern, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, krumme Linien gehören zu beschleunigten Körpern.[18]

Eine Besonderheit der Minkowski-Diagramme ist, dass wir in ihnen bequem verschiedene Inertialsysteme darstellen können, indem wir die Achsen neigen. Im nichtrelativistischen Fall genügt das neigen der Zeitachse (Abbildung 6).

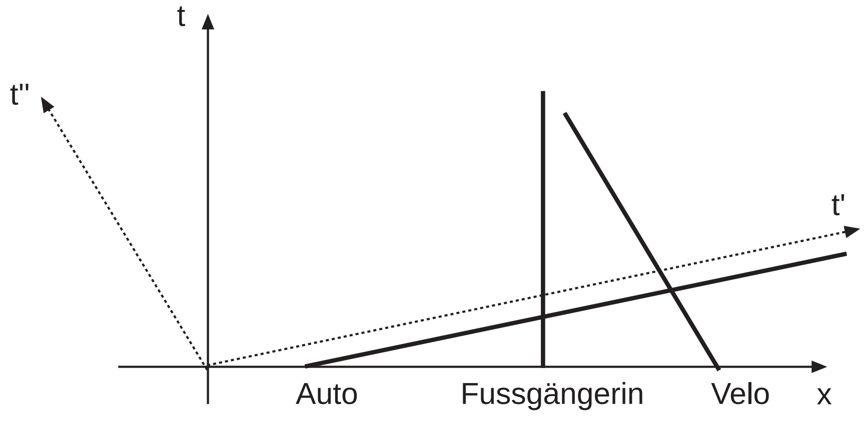

Abbildung 6: *Alle drei Inertialsysteme im nichtrelativistischen Fall. Die t-Achsen müssen parallel zur den Weltlinien verlaufen.*

[17] Natürlich unterdrücken wir im Unterricht die y- und z-Achse, der Velofahrer fährt auf dem Trottoir - das ist zwar verboten, gibt aber hier keinen Zusammenstoss.

[18] Wir betrachten in der speziellen Relativitätstheorie jedoch nur Inertialsysteme, also dürfen in unseren Skizzen keine krummen Linien vorkommen.

In dieser Abbildung sind neben dem ursprünglichen Inertialsystem auch das Ruhesystem des Autos und das Ruhesystem des Velos dargestellt. Ereignisse, die bezüglich einem Inertialsystem gleichzeitig passieren, liegen auf einer Parallelen zur x-Achse. Ereignisse, die bezüglich einem Inertialsystem am gleichen Ort stattfinden, liegen auf einer Parallelen zur jeweiligen t-Achse. Wenn wir Koordinaten ablesen wollen, legen wir also durch das Ereignis, welches durch die Koordinaten beschrieben wird, je eine Parallele zur x-Achse und eine zur t-Achse (Abbildung 7).

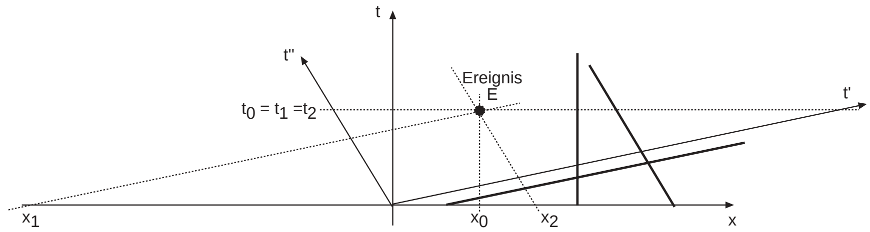

Abbildung 7: *Die Koordinaten eines Ereignisses E gemessen in allen drei Inertialsystemen. Die Koordinaten sind die Schnittpunkte von Geraden, welche durch das Ereignis laufen und parallel zu den jeweiligen Achsen des Inertialsystems sind.*

2.5.2 Relativistische Diagramme

Als erstes Zeichnen wir Diagramme, in welchen wir berücksichtigen, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist und betrachten ein Beispiel zur Gleichzeitigkeit. Danach konstruieren wir Ruhesysteme für relativistische Diagramme.

Einheiten. Wir werden von uns an der Einfachheit halber beide Achsen in Sekunden angeben. Das heisst, wir belassen die Einheit der t-Achse und rechnen die Einheit der x-Achse um gemäss

$$\Delta x = c\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\mathrm{s} := 1\text{Lichtsekunde} = 1\mathrm{ls} \approx 300'000\mathrm{km}.$$

Man verwendet mit Vorteil gleiche Zeicheneinheiten, das heisst, eine Sekunde wird auf der t-Achse gleich lang dargestellt wie eine Lichtsekunde auf der x-Achse: Damit bewegt sich Licht, welches am Ursprung eines Minkowski Diagrams ausgesendet wird, immer auf Winkelhalbierenden (Abbildung 8).

Beispiel zur Gleichzeitigkeit. Zwei Raketen fliegen aneinander vorbei mit Geschwindigkeit $v = \frac{c}{2}$ in exakt entgegengesetzter Richtung. Wenn die Raketen auf der selben Höhe sind, wird in der Mitte zwischen beiden Raketen ein Lichtblitz ausgesandt, welcher Uhren in den Raumschiffen starten soll, die jeweils am Bug und am Heck angebracht sind (Abbildung 9).

Aus der Sicht der unteren Rakete bewegt sich die obere mit $v = \frac{c}{2}$ nach links und während in ihrer Rakete beide Uhren gleichzeitig gestartet werden, startet in der oberen Raketen zuerst die Uhr im Heck, dann diese

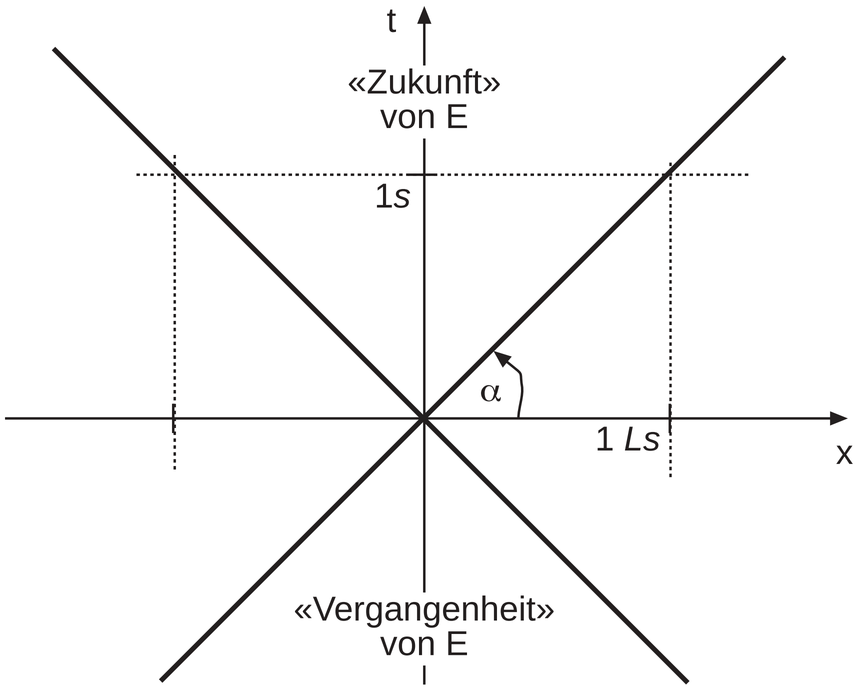

Abbildung 8: *Ein zweidimensionaler Lichtkegel im Koordinatensytem. Alle Ereignisse, welche überhaupt vom Ursprung des Koordinatensystems beeinflusst werden können liegen in der* Zukunft *des Ursprungs, da sich nichts schneller als das Licht bewegen kann. In drei Dimensionen wird daraus der Zukunftslichtkegel.*

im Bug. Aus der Sicht der unteren Rakete ist es genau umgekehrt. Mit Minkowski-Diagrammen ist dieser Sachverhalt sehr einfach darzustellen und zu verstehen.

Achsen. Nun überlegen wir uns, was beim Übergang von der Newtonschen Mechanik zur speziellen Relativitätstheorie an diesen Diagrammen verändert werden muss: Die Zeitdilatation sagt uns, dass wir beim Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes berücksichtigen müssen, dass die Uhren nicht gleich schnell laufen. Wir haben aber bisher angenommen, dass wir mit immer gleichen Zeitabständen rechnen können,[19] auch wenn wir die t-Achse um einen Winkel α neigen, um ins Ruhesystem eines Körpers zu gelangen.

Betrachten wir eine Rakete, welche in einem Inertialsystem I mit einer Geschwindigkeit $v = 0,6c$ in x-Richtung fliegt. Nun drehen wir die t-Achse, um das Raumschiff im Ruhesystem zu haben, wir nennen das gedrehte System I', und die zu diesem System gehörenden Achsen t', bzw. x'. Wir müssen einen Weg suchen, eine der t'-Achse angepasste x'-Achse zu konstruieren, um die Forderung der Zeitdilatation zu erfüllen. Hierbei bedienen wir uns der in Kapitel 2.3.3 eingeführten Einstein-Synchronisation: Wir sen-

[19] Parallele Geraden zur x-Achse für jede t-Achse.

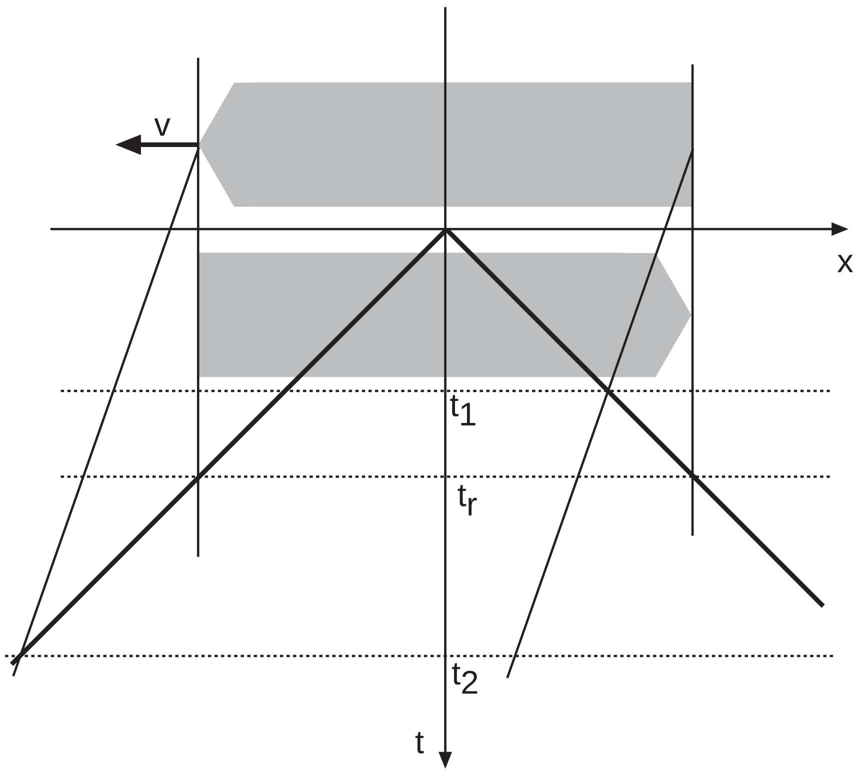

Abbildung 9: *Zwei Raketen fliegen mit halber Lichtgeschwindigkeit aneinander vorbei. Aus der Sicht der unteren Rakete bewegt sich die obere mit halber Lichtgeschwindigkeit nach links. In der Mitte der beiden Raketen wird ein Lichtblitz ausgesandt, der resultierende Lichtkegel ist eingezeichnet: Die Weltlinien des bewegten Raumschiffs schneiden den Lichtkegel zu zwei verschiedenen Zeitpunkten.*

den zwei Lichtsignale ab, welche sich in der Mitte des Raumschiffes treffen sollen, eines vom Bug aus, eines vom Heck aus (Abbildung 10).

Der Lichtstrahl vom Heck schneidet die Mittellinie des Raumschiffes, dort muss auch der Lichtstrahl vom Bug schneiden, der unter dem selben Winkel aus der anderen Richtung im System I kommen muss. Damit haben wir das Ereignis gefunden, von wo aus das Licht ausgesandt werden musste von der Bug-Weltlinie aus. Und da die Lichtstrahlen sich in der Mitte des Raumschiffs treffen, müssen die beiden Aussendungs-Ereignisse gleichzeitig passieren: Wir haben mit dem Schnittpunkt des Bug-Lichtstrahls und der Bug-Weltlinie einen Punkt gefunden, der dem Ursprung des Systems I' gleichzeitig ist, daher muss dort auch die x'-Achse schneiden.

Die Winkel α müssen für die t'- und die x'-Achse gleich sein, weil die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem gleich ist und die Ausbreitung von Lichtstrahlen aufgrund der Einheitenkonventionen auf der Winkelhalbierenden passieren muss.

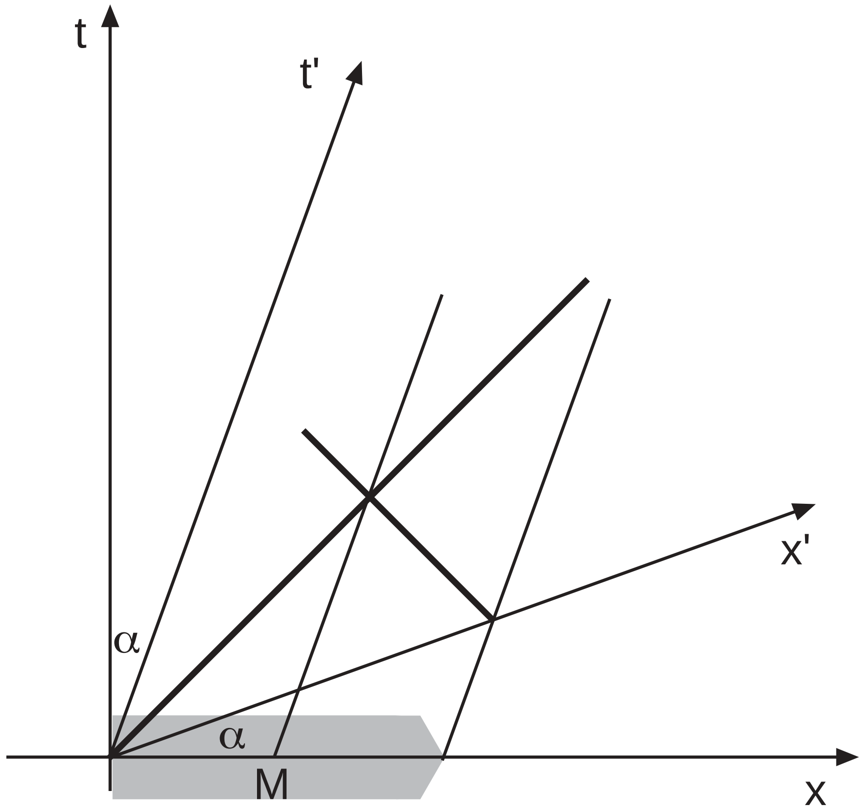

Abbildung 10: *Ein Raumschiff sendet gleichzeitig zwei Lichtsignale aus, eines am Bug, eines am Heck. Eingezeichnet sind die Weltlinien der Lichtsignale und die Weltlinie der Mitte des Schiffes, wo sich die Lichtsignale treffen. Die restlichen Geraden dienen zur Konstruktion des Inertialsystems I'.*

2.6 Herleitung der Lorentz-Transformationen

Die Zeitdilatation ist nicht die einzige Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie, auch für den Raum und die Masse gibt es ähnliche Anpassungen zu berücksichtigen. In diesem Abschnitt werden wir nochmals die Zeitdilatation in einem allgemeinen Zusammenhang herleiten und in der selben Herleitung die sognannte *Längenkontraktion* bekommen. Damit sind die Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie für die Kinematik zusammengestellt und im nächsten Abschnitt wenden wir dieses Wissen dann auf die Dynamik an, um die berühmte Einstein'sche Formel $E = mc^2$ zu verstehen.

Wir betrachten ein Ereignis in zwei um den Winkel α gedrehten Inertialsystemen I und I' (Abbildung 11). Das Ereignis habe darin die Koordinaten

$$xe, cte \qquad \text{bzw.} \qquad x'e', ct'e'.$$

Hier rechnen wir mit den Einheiten e und e' im jeweiligen Koordinatensytemen, ct rechnet Zeiten in Längen um, damit wir dieselben Einheiten benutzen können.

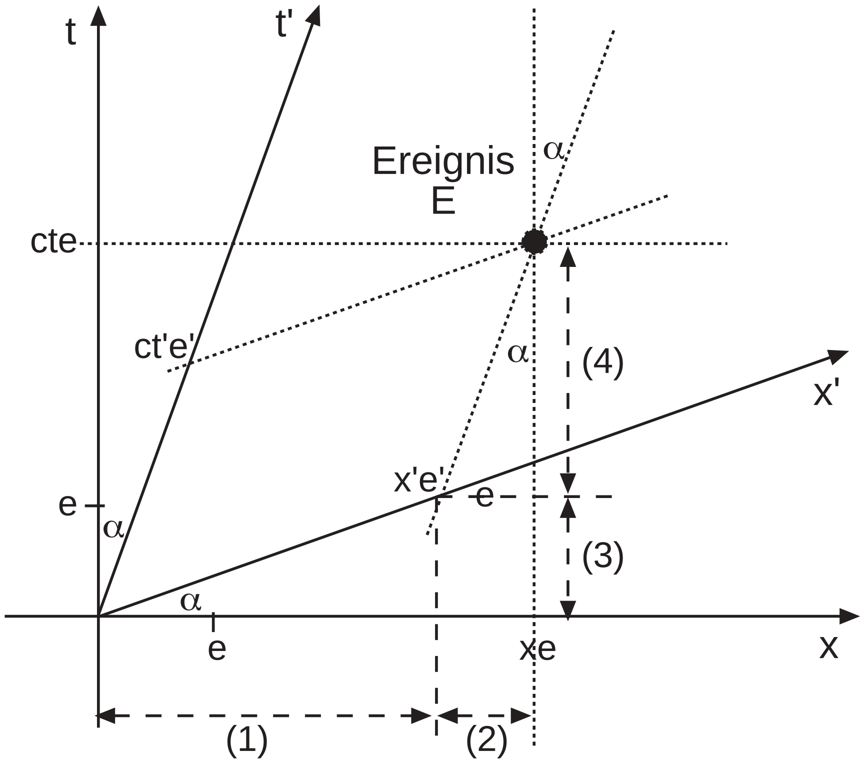

Abbildung 11: *Ein Ereignis E wird in zwei Inertialsystemen I und I′ gemessen. Die Konstruktion zeigt, wie man die gestrichenen Koordinaten aus den ungestrichenen Koordinaten erhält.*

Wenn wir den Winkel α transportieren, am Ereignis spiegeln und die Definition von cos und sin benutzen mit den zwei durch die gestrichelten Hilfslininen entstehenden rechtwinkligen Dreiecken:

$$xe = \underbrace{x'e'\cos\alpha}_{1} + \underbrace{ct'e'\sin\alpha}_{2} \tag{6}$$

$$cte = \underbrace{x'e'\sin\alpha}_{3} + \underbrace{ct'e'\cos\alpha}_{4} \tag{7}$$

Division durch e und Ausklammern von $\cos\alpha$ gibt[20]

$$x = \frac{e'}{e}\cos\alpha\left(x' + ct'\tan\alpha\right)$$

$$ct = \frac{e'}{e}\cos\alpha\left(x'\tan\alpha + ct'.\right)$$

Wir können Ausdrücke für $\frac{e'}{e}$, $\cos\alpha$ finden aus Abbildung 12.

[20] Da $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} := \tan\alpha$ gilt.

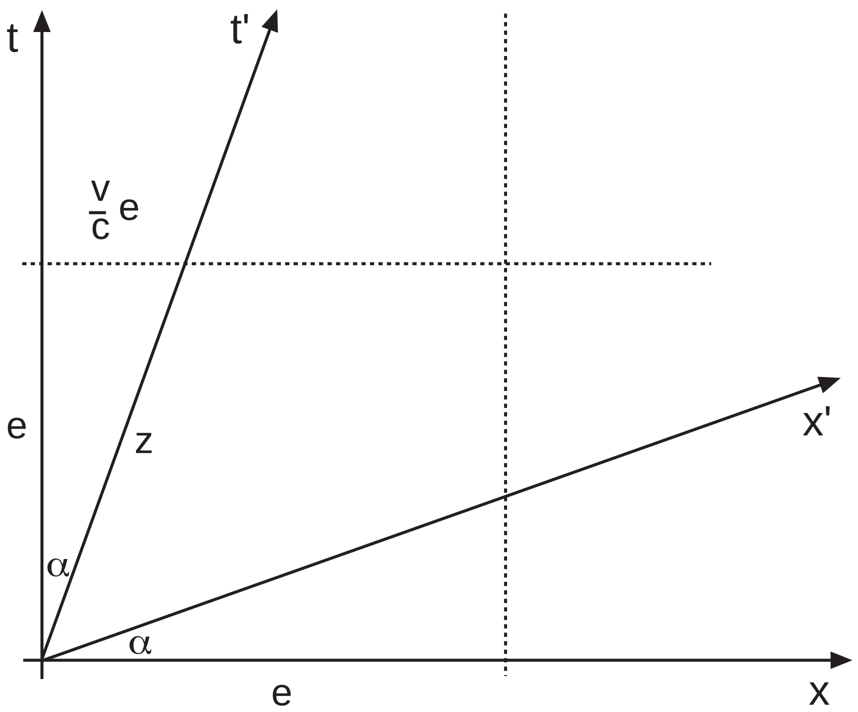

Abbildung 12: *Aus diesem Dreieck kann man alle notwendigen geometrischen Beziehungen zur Herleitung der Lorentztransformation ablesen.*

Nach Pythagoras gilt

$$z = \sqrt{e^2 + \frac{v^2}{c^2}e^2} = e\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}},$$

aber aufgrund der Längenkontraktion (5) gilt auch

$$z = e'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für z liefert

$$\frac{e'}{e} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

Den Ausruck für $\cos\alpha$ finden wir aus der Definition des Cosinus aus der selben Skizze

$$\cos\alpha = \frac{e}{z} = \frac{e}{e\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9}$$

Schliesslich lesen wir aus der Skizze noch

$$\tan\alpha = \frac{\frac{v}{c}e}{e} = \frac{v}{c} \tag{10}$$

ab, und setzen (8), (9) und (10) in (6) und (7) ein:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \left(x' + ct'\frac{v}{c}\right) \\
ct &= \frac{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \left(x'\frac{v}{c} + ct'\right).
\end{aligned}
$$

Dies ergibt die *speziellen Lorentztransformationen*:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11}$$

$$t = \frac{t' + x'\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

2.7 Herleitung von $E = mc^2$

Wir betrachten den Stoss eines Autos mit einer Wand. Das Auto habe die Masse $m = 1000\text{kg}$. Wir nehmen an, dass sich das Auto im Ruhesystem mit der Geschwindigkeit $v = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf einer Strecke der Länge $s = 100\text{m}$ bewegt während der Zeit $t = 4\text{s}$, bevor es mit der Wand stösst.

Der Impuls ist dann

$$p = m \cdot v = 1000\text{kg} \cdot 25\frac{\text{m}}{\text{s}} = 25'000\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nun betrachten wir denselben Stoss aus einem zum Inertialsystem I senkrecht mit der Geschwindigkeit $u = 0,6\text{c}$ bewegten System I'. Da es senkrecht zum Inertialsystem I bewegt ist, sieht das bewegte System keine Längenkontraktion, diese träte nur in Fahrtrichtung in Erscheinung. Die Wand muss in beiden Systemen gleich eingedrückt sein, wenn keine Längenkontraktion auftritt, also muss der Impuls in beiden Systemen I und I' derselbe sein:

$$p = p' = 25'000\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{13}$$

Ohne Längenkontraktion gilt für die vom Auto zurückgelegten Wege

$$s = s'. \tag{14}$$

Von Uhren, die in I' ruhen aus gesehen, läuft die Zeit in I langsamer. Mit der Zeitdilatation ergibt sich

$$t = t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

also

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{4\text{s}}{\sqrt{1-(\frac{6}{10})^2}} = 5\text{s}.$$

Damit wird die Geschwindigkeit des Autos aus der Sicht von I'

$$v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'} = \frac{100\text{m}}{5\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nach (13) hat das Auto dann eine von m verschiedene Masse aus der Sicht des bewegten Bezugssystems I':

$$p' = m' \cdot v' \Longrightarrow m' = \frac{p'}{v'} = \frac{25'000}{20}\text{kg} = 1250\text{kg}.$$

Je schneller das Auto fährt, desto schwerer wird es.[21] Es gilt eine Beziehung wie für Zeitdilatation oder Längenkontraktion, mit (13) und (14):

$$m' = m\frac{v}{v'} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\frac{\Delta s'}{\Delta t'}} = m\frac{\Delta t'}{\Delta t} = m\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

allgemein mit der mit Geschwindigkeit v bewegten Masse m und der Ruhemasse m_0:

$$m = m_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{15}$$

Warum wird ein Auto je schwerer, desto schneller es sich bewegt? Das einzige, was sich sich ändert, ist die kinetische Energie des Autos - kann es sein, dass diese Energie zur Masse des Autos beiträgt? Die Antwort auf diese Frage bekommen wir, wenn die Massenzunahme $m - m_0$ berechnen. Darin müsste sich die Massenzunahme durch die kinetische Energie manifestieren. So berechnen wir

$$\begin{aligned}
m - m_0 &= m_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} - 1\right) \\
&= m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}m_0v^2\frac{1}{c^2} \\
&= E_{kin}\frac{1}{c^2} \\
\Longrightarrow \quad & E_{kin} = (m - m_0)c^2.
\end{aligned}$$

[21] Überlege, was passiert, wenn sich ein Körper immer schneller wird und fast Lichtgeschwindigkeit hat? Es kann sich also auch deswegen nichts schneller als Licht bewegen.

Beim dritten Gleichheitszeichen wurde der sogenannte Satz von Taylor verwendet, nach dem sich jede Funktion nach bestimmten Regeln durch eine Summe von solchen Termen annähern lässt. Nennen wir m_0c^2 die *Ruheenergie* eines Körpers, so wird die *Gesamtenergie* des Körpers

$$E = \underbrace{m_0c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{mc^2 - m_0c^2}_{\text{Bewegungsenergie } E_{kin}} .$$

Dies ist die berühmte Einstein'sche Formel, welche besagt, dass Masse und Energie äquivalent sind:

$$E = mc^2. \tag{16}$$

Diese Formel hat enorme Anwendungen im gesamten Bereich der Teilchenphysik, und wir sind ihr bereits bei der Untersuchung von Energiequellen in Sternen über den Weg gelaufen.

3 Allgemeine Relativitätstheorie

Die neben der Quantenmechanik bahnbrechendste Theorie des letzten Jahrtausends wurde von Albert Einstein 1915 publiziert: Die *allgemeine Relativitätstheorie*. Der grundlegend neue Idee darin war, dass die Gravitationskraft nicht durch eine Massenanziehung wie bei Newton zustande kommt, sondern durch eine *Krümmung der Raum-Zeit*. Die allgemeine Relativitätstheorie ist also eine *Einstein'sche Gravitationstheorie*, welche die Newton'sche Gravitationstheorie ablöst.[22] Die spezielle Relativitätstheorie gilt nur für spezielle Bezugssysteme, die Inertialsysteme, während die allgemeine Relativitätstheorie auch beschleunigte Bezugssysteme umfasst.

Krümmung der Raumzeit Unsere bekannte *Euklidische Geometrie* beruht auf rechtwinkligen Koordinatensystemen, in welchen Positionen von Körpern gemessen werden. Wie kommt man überhaupt darauf, in solchen Koordinatensystemen zu arbeiten? Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass die Menschen zur Zeit Euklids ($\approx$ 300 v. Chr.) noch dachten, dass die Erde flach sei. Auf einer runden Erdkugel macht die Euklidische Geometrie vieles komplizierter, es sei denn, man sagt, dass wir jeden beliebigen Punkt auf der Oberfläche der Erdkugel mit einer Ebene annähern. Die Erfahrung sagt uns, dass wir dies tun können: Die kürzeste Verbindung von Züerich nach Genf ist in unserer Vorstellung eine Gerade. Ganz genau genommen ist die kürzeste Verbindung von Zuerich nach Genf ein Kreisabschnitt, dessen Mittelpunkt im Erdmittelpunkt liegt - wir können schliesslich auch von Zürich nach Sydney nicht auf einer Geraden fliegen!

Im dreidimensionalen Fall haben wir es also tatsächlich mit der Geometrie auf einer Kugel zu tun, wo kürzeste Verbindungen Kreisabschnitte und keine Gerade sind. Trotzdem können wir in Euklidischen Koordinatensystemen rechnen und bekommen keine grossen Fehler für fast alle Anwendungen in unserem täglichen Leben.

Einsteins allgemeine Relativitätstheorie behandelt nun den Fall, dass sich die Krümmung des Raumes von Punkt zu Punkt verändern kann.[23]

Äquivalenzprinzip Eine einfache Beobachtung liegt Einsteins neuer Gravitationstheorie zugrunde: Alle Körper fallen im freien Fall gleich schnell, unabhängig von ihrer Masse. Baut man um einen frei fallenden Körper einen Kasten und stellt eine Physikerin hinein, welche mit dem Körper Experimente machen kann, wird die Physikerin schnell herausfinden, dass sich der Körper nach dem Trägheitsprinzip verhält. Die Physikerin und der Kasten fallen frei mit dem Körper - es gibt kein Experiment, mit dem die Physikerin beweisen kann, dass sie sich in einem frei fallenden Kasten befindet

[22] Natürlich ist die Newton'sche Gravitationstheorie nicht falsch, sie ist einfach zu wenig genau, um viele Phänomene zu beschreiben, welche die allgemeine Relativitätstheorie richtig beschreibt.

[23] Im flachen Raum ist die Krümmung überall Null. Die grundlegende Theorie gekrümmter Räume wurde übrigens von Bernhard Riemann ausgearbeitet und wird heute an den Universitäten als *Differentialgeometrie* gelehrt.

und nicht in der Schwerelosigkeit weit weg vom nächsten Himmelskörper: In beiden Situationen gilt der Trägheitssatz. Dies bedeutet aber, dass sowohl der Kasten in der Schwerelosigkeit, als auch der frei fallende Kasten Inertialsysteme sind, und demzufolge die spezielle Relativitätstheorie in ihnen gilt.[24]

Stellen wir uns den Fall vor, in welchem der Kasten beschleunigt wird, sagen wir, er stehe in der Rakete, welche ihn an einen anderen Ort im Sonnensystem bringt. Dann sieht die Physikerin plötzlich Bewegungen des Körpers, welche sie der Beschleunigung zuschreibt - sie spürt selber auch, dass sie mehr auf den Boden gedrückt bzw. ihr Körper vom Boden weggehoben wird. Im frei fallenden Kasten konnte sie den Probekörper vor ihrer Nase loslassen und er fiel nicht zu Boden, genauso im schwerelosen Kasten, aber nun fällt der Körper entgegen der Bewegungsrichtung der Rakete auf den Boden oder zur Decke. Nun landet die Rakete auf der Erde, die Physikerin lässt den Körper nochmals los - und er fällt wieder auf den Boden. Daraus muss die Physikerin schliessen, *dass der Kasten immer noch beschleunigt wird.* Ausserhalb des Kastens wissen wir aber, dass der Kasten auf der Erde steht. Die Physikerin *kann nicht unterscheiden, ob sie sich in einem beschleunigten Bezugssystem befindet, oder in einem Bezugssystem in einem Gravitationsfeld.* Deshalb schreiben wir das Kraftgesetz des freien Falles und das Newton'sche Bewegungsgesetz gleich

$$F = m \cdot a = m \cdot g$$

und können nicht unterscheiden, ob der Kasten im Weltall mit $a = g$ beschleunigt wird oder auf der Erde steht. Die einzige Voraussetzung dafür ist natürlich, dass das Gravitationsfeld der Erde nicht varriert über die Höhe des Kastens.[25]

Dies nennt man das *Äquivalenzprinzip*: In einem homogenen Gravitationsfeld laufen Vorgänge in gleicher Weise ab wie die in einem gleichmässig beschleunigten Bezugssystem.

Aufbauend auf dieser Idee und mit Hilfe der Riemann'schen Geometrie konstruierte Einstein mit der allgemeinen Relativitätstheorie eine Theorie, in welchen sich Körper nur noch in der gekrümmten Raum-Zeit von Inertialsystem zu Inertialsystem bewegen. Die Krümmung wird von den Massen verursacht.

Bemerkung zu den Effekten der allgemeinen Relativtätstheorie
Die Besprechung und Berechnung einiger einfacher Effekte wird auf ein späteres Astronomiefreifach vertagt. Vorerst nur folgende Bemerkungen:

Die Erde bewegt sich aufgrund der Raumkrümmung auf ihrer krummen Bahn um die Sonne. Ebenso wird das Licht durch die starke Raumkrümmung

[24] Inertialsysteme sind ja per Definition Bezugssysteme, in welchen der Trägheitssatz gilt.

[25] Sonst könnte die Physikerin Messungen machen, welche zeigen, dass der Körper oben im Kasten anders beschleunigt wird als unten im Kasten, wenn der Kasten auf der Erde steht, bei der Rakete hingegen wären beide Beschleunigungen identisch.

um die Sonne abgelenkt. Diesen Effekt kann man z. B. bei Sonnenfinsternissen beobachten.

Uhren gehen in der gekrümmnten Raum-Zeit langsamer als in der flachen Raumzeit.

Licht erfährt eine sogenannte Gravitationsrotverschiebung.

Die Bahnachse der Planetenbahn des Merkurs dreht sich mit der Zeit - diese Effekte werden nur in der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagt und sind in der Newton'schen Theorie nicht enthalten.

Diese und andere Effekte erklären Beobachtungen, welche man ohne die neue Gravitationstheorie Einsteins nicht versteht. Natürlich gibt es auch zahlreiche Anwendungen in der Astrophysik und die gesamte moderne theoretische Kosmologie baut auf dem Fundament der allgemeinen Relativitätstheorie auf.

A Personenverzeichnis

Einstein, Albert	1879-1955
Euklid	365-300 v. Chr.
Lorentz, Hendrik Antoon	1853-1928
Maxwell, James Clerk	1831-1879
Michelson, Albert Abraham	1852-1931
Newton, Sir Isaac	1643-1727
Poincaré, Julies Henri	1854-1912
Riemann, Georg Friedrich Bernhard	1826-1866
Roember, Olaf	1644-1710

Literatur

[1] Grehn, Joachim (Hrsg.) *Metzler Physik.* Schroedel Verlag GmbH. Hannover, 1998.

[2] Hewitt, Paul G. *Conceptual Physics.* Addison-Wesley Verlag. Eight Edition, New York, 1998.
Enthält zwei Kapitel über Relativitätstheorie, praktisch ohne Formeln, sehr gut und einfach erklärt.

[3] Simonyi, Karoly. *Kulturgeschichte der Physik.* Aus dem Ungarischen von Klara Christoph, Dresden. Verlag Harri Deutsch. Thun, 1990.

[4] Sexl, Roman (Hrsg.) *Materie in Raum und Zeit. Eine Einführung in die Physik. Band 3.* Sauerländer Verlag. Aarau, 2. Auflage, 1991.

[5] Straumann, Norbert. *Spezielle Relativitätstheorie.* Skriptum zur Vorlesung. Uni Zürich.